

Edgar Höniger
Kantnersleite 4

95512 Neudrossenfeld

Über die Lage von Schwerpunkten

A. PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN UND FORMELGLEICHUNGEN

Der Schwerpunkt eines physikalischen Körpers ist ein Punkt im Inneren oder außerhalb dieses Körpers mit der folgenden Eigenschaft: Legt man durch diesen Punkt eine starre Achse, so erzeugen die an seinen einzelnen Massenteilen wirkenden Schwerkkräfte bezüglich dieser Achse Drehmomente, deren Vektorsumme Null ergibt.¹

Nach jeder Drehung um diese Achse verharrt der Körper damit weiter in Ruhe. Dieser Zustand heißt „indifferentes Gleichgewicht“. Daneben gibt es noch

- das stabile Gleichgewicht: Nach jeder Auslenkung aus der Ruhelage kehrt der Körper in die ursprüngliche Position zurück. Dabei befindet sich der Schwerpunkt „unterhalb“ des Drehpunktes. Genauer: Der Schwerpunkt liegt zwischen Drehpunkt und Erdmittelpunkt.
- das labile Gleichgewicht: Nach jeder Auslenkung aus der Ruhelage kehrt der Körper nicht mehr in die ursprüngliche Position zurück, sondern er versucht immer, eine stabile Gleichgewichtslage einzunehmen. Im labilen Gleichgewicht befindet sich der Schwerpunkt „oberhalb“ des Drehpunktes. Genauer: Der Drehpunkt liegt zwischen Schwerpunkt und Erdmittelpunkt.

Der Schwerpunkt eines Körpers ist bestrebt, dem Erdmittelpunkt so nahe wie möglich zu kommen. Ohne Gravitation ist der Schwerpunkt eines Körpers gegenstandslos.

Wenn auf einen beweglichen Körper Kräfte wirken, die seinen Schwerpunkt bewegen, so beschreibt er eine Bahnkurve, die in vielen Fällen mathematisch darstellbar ist. Ihre Berechnung lässt sich dadurch vereinfachen, dass man den Körper theoretisch auf eine punktförmige Masse in seinem Schwerpunkt vereinigt. Deshalb heißt der Schwerpunkt auch **Massenmittelpunkt**.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass der (feste) Körper aus zwei Massen m_1 und m_2 besteht, die durch eine starre, gewichtslose Stange $[AB]$ miteinander verbunden sind. Wir legen das Bild eines solchen Körpers auf eine Zahlen-Halbgerade (siehe Abb. 1):



Abbildung 1: Ein Körper im Gleichgewicht

Der Körper wird im Punkt S unterstützt, so dass Gleichgewicht herrscht. Die Drehmomente links und rechts vom Unterstützungspunkt müssen daher gleich sein:

$$\begin{aligned}
 m_1 \cdot g \cdot \overline{AS} &= m_2 \cdot g \cdot \overline{SB} \quad \Leftrightarrow \quad m_1(z_s - z_1) = m_2(z_2 - z_s) \\
 \Leftrightarrow \quad z_s &= \frac{m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2}{m_1 + m_2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Wir beschäftigen uns nun mit dem Sonderfall, dass der Körper K fest ist und eine Symmetrieachse s besitzt.

Unter diesen Bedingungen untersuchen wir speziell Rotationskörper aus einem homogenen Material.

¹Chr. Gehrtsen, H.O. Kneser: Physik, S. 39; Springer-Verlag 1969

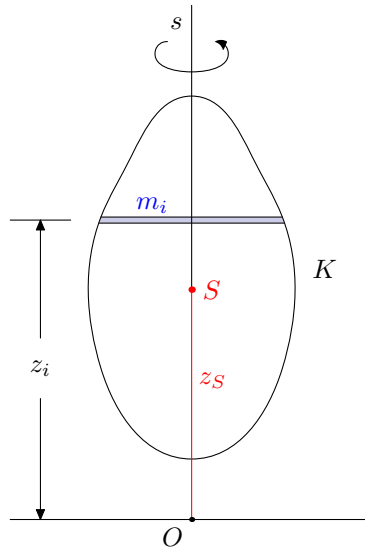


Abbildung 2: Der Axialschnitt eines Rotationskörpers

In der Abb. 2 ist die um 90° gedrehte Koordinatenachse z aus der Abb. 1 zur Symmetrieachse s geworden.

Wir zerlegen den Rotationskörper K in n Massenscheiben, deren sämtliche Mittelpunkte auf s liegen. In der Abb. 2 ist die i -te Scheibe mit der Masse m_i als ein Stellvertreter aller Scheiben dargestellt.

Wir verallgemeinern die Beziehung (1): $z_s = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$.

Es sei ρ die Dichte des homogenen Rotationskörpers. Dann gilt $m_i = \rho \cdot V_i$, und wir schreiben:

$$z_s = \frac{\sum_{i=1}^n \rho \cdot z_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n \rho \cdot V_i} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}.$$

Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ werden im Nenner die Volumenelemente V_i zum Volumen V des Rotationskörpers K aufsummiert. Im Zähler werden gleichzeitig die Volumenelemente V_i zu infinitesimalen Volumina dV und die Variablen z_i zur Variablen z . Somit erhalten wir wie in ² die Formelgleichung:

$$\boxed{z_s = \frac{\int_V z \cdot dV}{V}} \quad . \quad (3)$$

²H.-J. Bartsch: Mathematische Formeln, S. 362 Nr.5; VEB Fachbuchverlag Leipzig 1973

B. LÖSUNGEN KONKRETER PROBLEME AM KEGEL

B1. DER SCHWERPUNKT IM GERADEN KREISKEGEL

1. Möglichkeit:

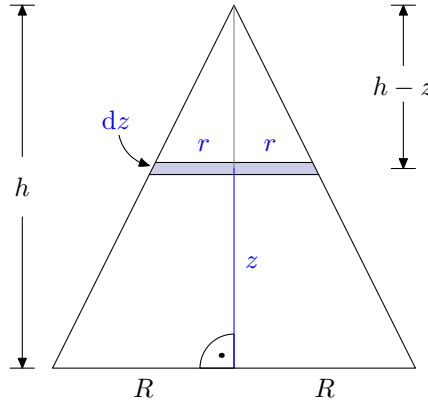


Abbildung 3: Zur Lage des Schwerpunktes im Kegel

Gemäß der Abb. 2 unterteilen wir in der Abb. 3 den Kegel in infinitesimale zylindrische Scheiben mit dem Radius r und der Höhe dz , deren Mittelpunkte auf der Drehachse liegen. Für das Volumenelement dV einer solchen Scheibe gilt dann: $dV = \pi \cdot r^2 \cdot dz$.

In der Abb. 3 wenden wir einen Ähnlichkeitssatz an: $\frac{r}{R} = \frac{h-z}{h} \Leftrightarrow r = R \cdot \frac{h-z}{h}$.

Wir setzen ein: $dV = \pi R^2 \cdot \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 \cdot dz$. Mit (3) gilt dann:

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{\frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \int_0^h z(h-z)^2 dz}{\frac{1}{3} R^2 \pi h} = \frac{3}{h^3} \cdot \int_0^h (zh^2 - 2z^2h + z^3) dz \\ &= \frac{3}{h^3} \cdot \left[\frac{1}{2} z^2 h^2 - \frac{2}{3} z^3 h + \frac{z^4}{4} \right]_0^h = \frac{3}{h^3} \cdot \frac{6h^4 - 8h^4 + 3h^4}{12} = \frac{3}{h^3} \cdot \frac{h^4}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_s(\text{Kegel}) = \frac{h}{4}} \quad .$$

2. Möglichkeit:

In der Abb. 4 wird der Axialschnitt OAB des Kegels mit dem Radius R und der Höhe h durch eine Rotation der Strecke $[OB]$ um die x -Achse erzeugt. Diese Strecke liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{R}{h} \cdot x$.

Für das Volumen der infinitesimalen Scheibe gilt: $dV = y^2 \cdot \pi \cdot dx = \left(\frac{R}{h} \cdot x\right)^2 \cdot \pi \cdot dx$. Der Abszissenwert z_s des Schwerpunktes S wird jetzt von der Kegelspitze ab gemessen. Mit (3) folgt:

$$z_s = \frac{\int_0^h \left(x \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot \pi \right) dx}{\frac{1}{3} R^2 \cdot \pi \cdot h} = \frac{3}{h^3} \cdot \int_0^h x^3 dx = \left[\frac{3}{h^3} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^h = \frac{3}{4} \cdot h.$$

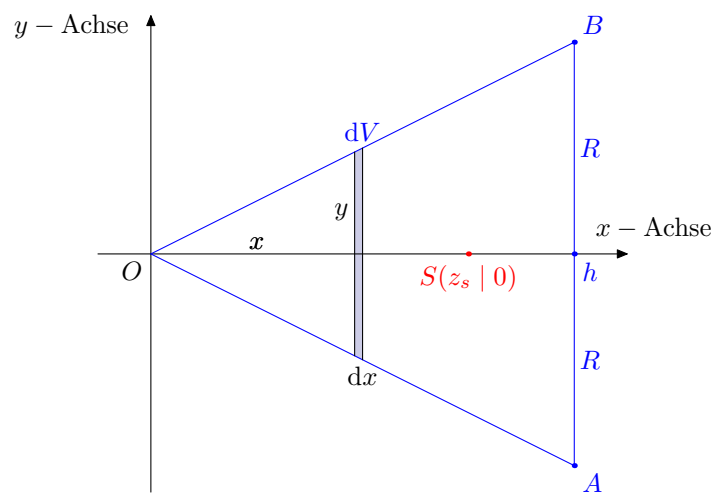


Abbildung 4: Der Axialschnitt des Kegels im Koordinatensystem

B2. DER SCHWERPUNKT IM GERADEN KREISKEGELSTUMPF

1. Möglichkeit: Wir integrieren von links analog zur 2. Möglichkeit im Abschnitt B1

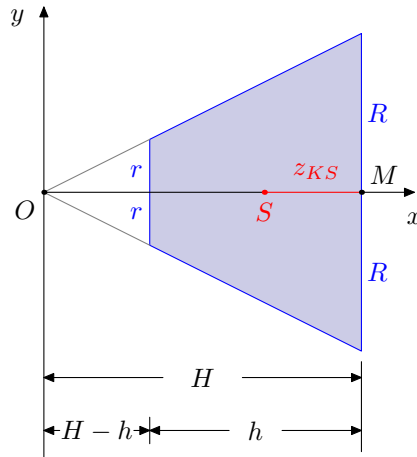


Abbildung 5: Der Axialschnitt des Kegelstumpfes im Koordinatensystem

In ³ finden wir die Volumenformel für den Kegelstumpf: $V_{KS} = \frac{1}{3}\pi h \cdot (R^2 + Rr + r^2)$.

In der Abb. 5 gilt:

$$\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R} \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{hR}{R-r} \quad (4)$$

und

$$H-h = \frac{hr}{R-r} \quad (5)$$

Wir integrieren in der Abb. 5 von $H-h$ bis H analog zur 2. Möglichkeit in B1 und verwenden anschließend (4) und (5) mehrfach:

$$\begin{aligned} \overline{OS} &= \frac{\frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \int_{H-h}^H x^3 dx}{\frac{1}{3}\pi h \cdot (R^2 + Rr + r^2)} = \frac{3}{h^3} \cdot \frac{R^2}{R^2 + Rr + r^2} \cdot \int_{H-h}^H x^3 dx \\ &= \frac{3}{h^3 \cdot H^2} \cdot \frac{R^2}{R^2 + Rr + r^2} \cdot \left[\frac{H^4}{4} - \frac{(H-h)^4}{4} \right] \quad \text{Wir multiplizieren } \frac{1}{H^2} \text{ in } [\dots] \\ &= \frac{3}{4h} \cdot \frac{R^2}{R^2 + Rr + r^2} \cdot \left[H^2 - \left(\frac{H-h}{H} \right)^2 \cdot (H-h)^2 \right] \\ &= \frac{3}{4h} \cdot \frac{R^2}{R^2 + Rr + r^2} \cdot \left[\frac{h^2 R^2}{(R-r)^2} - \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{h^2 r^2}{(R-r)^2} \right] \end{aligned}$$

Wir ersetzen nun $R^2 + Rr + r^2$ durch den äquivalenten Term $\frac{R^3 - r^3}{R-r}$ (*). Gleichzeitig bringen wir den Inhalt der [...] auf den Hauptnenner und klammern dann h^2 aus, so dass wir den Faktor h herauskürzen können. Damit ergibt sich:

³H.-J. Bartsch: Mathematische Formeln, S. 158 Nr.5; VEB Fachbuchverlag Leipzig 1973

$$\overline{OS} = \frac{3R^2h}{4} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^2 \cdot (R - r)^2} \cdot \frac{R - r}{R^3 - r^3} = \frac{3h}{4} \cdot \frac{R^4 - r^4}{(R - r)(R^3 - r^3)} \quad .$$

Die Lage des Schwerpunktes des geraden Kreiskegelstumpfes wird gewöhnlich als Abstand dieses Punktes zur größeren der beiden Kreisflächen angegeben. Das bedeutet in der Abb. 5:

$$\begin{aligned} z_{\text{KS}} &= \overline{SM} = \overline{OM} - \overline{OS} = H - \overline{OS} \\ z_{\text{KS}} &= \frac{hR}{R - r} - \frac{3h}{4} \cdot \frac{R^4 - r^4}{(R - r)(R^3 - r^3)} \\ &= \frac{h}{4(R - r)} \left[4R - \frac{3R^4 - 3r^4}{R^3 - r^3} \right] \quad . \text{ Wir benutzen (*) und multiplizieren :} \\ &= \frac{h}{4(R - r)} \cdot \frac{4R^4 - 4R^3 - 3R^4 + 3r^4}{(R - r)(R^2 + Rr + r^2)} = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^4 - 4Rr^3 + 3r^4}{(R - r)^2(R^2 + Rr + r^2)} \end{aligned} \quad (6)$$

Wir führen eine Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{r} (R^4 - 4Rr^3 + 3r^4) : (R^2 - 2Rr + r^2) = R^2 + 2Rr + 3r^2 \\ \underline{R^4 - 2R^3r + R^2r^2} \\ 2R^3r - R^2r^2 - 4Rr^3 \\ \underline{2R^3r - 4R^2r^2 + 2Rr^3} \\ 3R^2r^2 - 6Rr^3 + 3r^4 \\ \underline{3R^2r^2 - 6Rr^3 + 3r^4} \\ 0 \end{array}$$

Also gilt:
$$z_{\text{KS}} = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} \quad .$$

Wir betrachten noch die Sonderfälle:

- Der Zylinder: Hier gilt $R = r$: $z_{\text{KS}} = \frac{h}{4} \cdot \frac{r^2 + 2r^2 + 3r^2}{r^2 + r^2 + r^2} = \frac{h}{4} \cdot \frac{6r^2}{3r^2} = \frac{h}{2}$
- Der Kegel: Hier gilt $r = 0$: $z_{\text{KS}} = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2}{R^2} = \frac{h}{4}$

2. Möglichkeit: Wir arbeiten analog zur Abb. 1 mit Drehmomenten.

In der Abb. 6 soll gelten: $z_{\text{KS}} = \overline{OS_{\text{KS}}}$, $z_{\text{ges}} = \overline{OS_{\text{ges}}}$ und $z_0 = \overline{OS_0}$, wobei S_0 , S_{ges} und S_{KS} die Lage der drei Schwerpunkte darstellen.

Die Drehmomente ergeben nun $z_{\text{KS}} \cdot V_{\text{KS}} = z_{\text{ges}} \cdot V_{\text{ges}} - z_0 \cdot V_0$.

Wir zeigen noch $z_0 = h + \frac{H - h}{4} = \frac{1}{4} \cdot (H + 3h)$ und erinnern uns daran, dass der Abstand des Schwerpunktes eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h von seiner Grundfläche $\frac{h}{4}$ beträgt,

Wir setzen nun ein und erhalten:

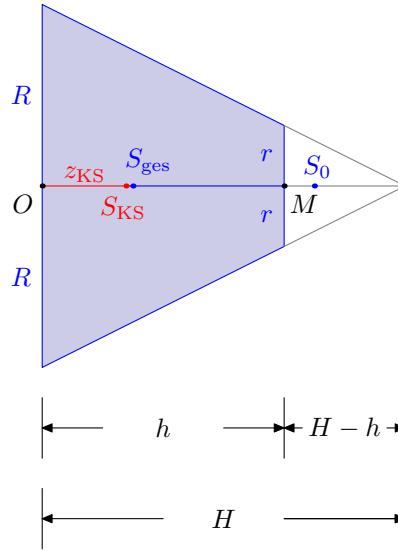


Abbildung 6: Der Axialschnitt des Kegelstumpfes mit drei Schwerpunkten

$$z_{KS} \cdot \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2) = \frac{H}{4} \cdot \frac{1}{3} R^2 \pi \cdot H - \frac{1}{4} \cdot (H + 3h) \cdot \frac{1}{3} r^2 \pi (H - h) \quad \left| \cdot \frac{3}{\pi} \right.$$

Mit (5):

$$z_{KS} \cdot h \cdot (R^2 + Rr + r^2) = \frac{h^2 \cdot R^4}{4(R-r)^2} - \frac{3h + \frac{hR}{R-r}}{4} \cdot \frac{hr^3}{R-r} \quad \left| : h \right.$$

$$= \frac{h}{4} \cdot \left[\frac{R^4}{(R-r)^2} - \frac{3R - 3r + R}{R-r} \cdot \frac{r^3}{R-r} \right]$$

$$= \frac{h}{4(R-r)^2} \cdot [R^4 - (4R - 3r) \cdot r^3]$$

$$z_{KS} \cdot (R^2 + Rr + r^2) = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^4 - 4Rr^3 + 3r^4}{(R-r)^2}$$

Damit sind wir wieder bei (6) angelangt.

Anmerkungen:

- Da in der 2. Möglichkeit physikalische Gesetze in der Voraussetzung mitwirken, wird der Rechenweg im Vergleich zur 1. Möglichkeit, die physikalische Sachverhalte außer Acht lässt, kürzer.
- Grundsätzlich nähren Rechenwege, auf denen sich wie hier vieles herauskürzen lässt, den Verdacht, dass es unterwegs eine Abkürzung geben könnte. Wir sehen uns jedoch in unserem Fall außerstande, diesen Verdacht zu erhärten: In beiden Möglichkeiten ist z.B. die Polynomdivision wohl unumgänglich.

B3. DER SCHWERPUNKT IM HOHLEN KREISKEGEL MIT KONSTANTER WANDSTÄRKE

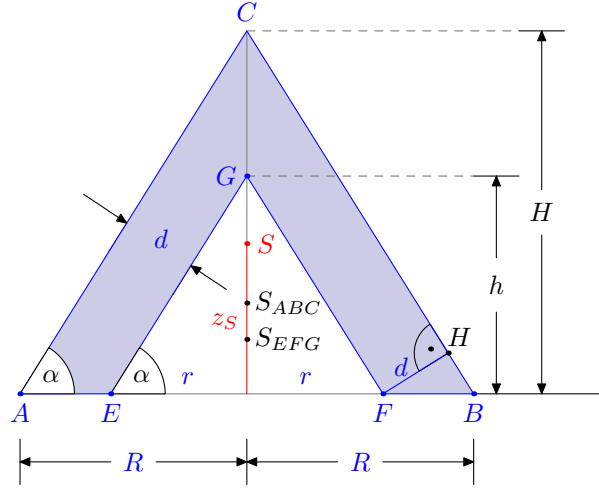


Abbildung 7: Der Axialschnitt eines Hohlkegels mit konstanter Wandstärke

Wie in der Abb. 7 dargestellt, müssen die Mantellinien des Kegels ABC dann paarweise parallel zu den Mantellinien des herausgefrästen Kegels EFG verlaufen.

Dort gilt: $h = r \cdot \tan \alpha = r \cdot \frac{H}{R}$. (7).

Wir wenden den Momentensatz an: $z_S \cdot V_{AEGFBC} = z_{ABC} \cdot V_{ABC} - z_{EFG} \cdot V_{EFG}$.

$$z_s \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot (R^2 H - r^2 h) = \frac{H}{4} \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 H - \frac{h}{4} \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 h \quad \left| \cdot \frac{12}{\pi} \right. \quad \text{und mit (7):}$$

$$4 \cdot z_s \cdot \left(R^2 H - r^3 \cdot \frac{H}{R} \right) = H^2 R^2 - \frac{r^4 \cdot H^2}{R^2} \quad \left| \cdot \frac{R^2}{H} \right.$$

$$4 \cdot z_s \cdot (R^4 - r^3 R) = H \cdot R^4 - H \cdot r^4$$

$$\boxed{z_S = \frac{H}{4R} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}} \quad . \quad (8)$$

Für $r \neq R$ gilt nun noch

$$z_S = \frac{H}{4R} \cdot \frac{(R-r)(R^3 + R^2 r + R r^2 + r^3)}{(R-r)(R^2 + R r + r^2)} = \frac{H}{4R} \cdot \frac{R^3 + R^2 r + R r^2 + r^3}{R^2 + R r + r^2}. \quad (9)$$

Ob diese Version einen ästhetischeren Anblick bietet als der Ausdruck (8), mag bezweifelt werden; zumindest aber lässt der gekürzte Bruch in (9) den Sonderfall $r = R$ wieder zu.

Es handelt sich in diesem Fall um einen doppelten Kegelmantel, der zwar eine Masse, aber keine Dicke hat.

$$\text{Mit (9) folgt somit } z_S = \frac{H}{4R} \cdot \frac{4R^3}{3R^2} = \frac{H}{3}. \quad (10)$$

Der zweite Sonderfall $r = 0$ liefert in (8): $z_S = \frac{H}{4}$ in Übereinstimmung mit der Lage des Schwerpunktes im massiven Kegel.

Für die scheinbar interessantere Wandstärke d statt r ergibt sich im Dreieck HFB :

$$d = (R - r) \cdot \sin \alpha \wedge \sin \alpha = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} \Rightarrow r = R - \frac{d \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{H}, \text{ was eingesetzt weder in (8) noch in (9) ersprießlich ist.}$$

B4. DER SCHWERPUNKT EINES HOHLEN KREISKEGELS MIT VERÄNDERLICHER WANDSTÄRKE

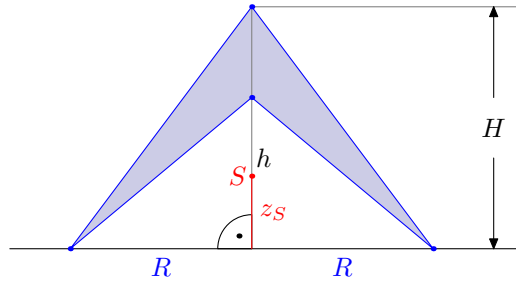


Abbildung 8: Der Axialschnitt eines Hohlkegels mit veränderlicher Wandstärke

In der Abb. 8 beträgt die Wandstärke an der Grundfläche 0 LE.

Die Rechenschritte erfolgen völlig analog zum Abschnitt B3. Die Momentengleichung ergibt:

$$z_S \cdot \left(\frac{1}{3} R^2 \pi H - \frac{1}{3} R^2 \pi h \right) = \frac{H}{4} \cdot \frac{1}{3} R^2 \pi H - \frac{h}{4} \cdot \frac{1}{3} R^2 \pi h \quad \left| \cdot \frac{12}{R^2 \cdot \pi} \right.$$

$$4z_S \cdot (H - h) = (H^2 - h^2)$$

$z_S = \frac{H + h}{4}$

(11)

Sonderfälle:

$h = H$: Es bleibt wieder nur der doppelte Kegelmantel ohne Dicke, aber mit einer Masse übrig.

Aus (11) folgt dann: $z_S = \frac{H}{2}$; im Gegensatz zu (10), wo es in Übereinstimmung mit der Literatur heißt: $z_S = \frac{H}{3}$. Wir wissen nicht, wie diese Diskrepanz zustandekommt; die unterschiedliche Annäherung mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen erzeugt unterschiedliche Ergebnisse.

W. Neidhardt ⁴ zeigt uns anhand der Abb. 9, dass ein existierender Grenzwert auch in einem anderen Fall die Vereinbarkeit von Theorie und Anschauung völlig außer Acht lässt:

In der Abb. 9 sei $r = \overline{MA} = \overline{MB}$ der Radius des größten Halbkreises.

Für die Länge u_0 dieses Halbkreisbogens gilt dann: $u_0 = r \cdot \pi$.

Für die Gesamtlänge u_{rot} der beiden roten Halbkreisbögen gilt: $u_{\text{rot}} = 2 \cdot \frac{r}{2} \cdot \pi = r \cdot \pi = u_0$.

Für die Gesamtlänge u_{blau} der vier blauen Halbkreisbögen gilt: $u_{\text{blau}} = 4 \cdot \frac{r}{4} \cdot \pi = u_0$.

Für die Gesamtlänge u_{magenta} der acht magentafarbenen Halbkreisbögen gilt:

$$u_{\text{magenta}} = 8 \cdot \frac{r}{8} \cdot \pi = u_0.$$

Wenn wir nun die Radien der Halbkreise weiter halbieren, und deren Anzahl entsprechend verdoppeln, so erhalten wir im n -ten Schritt:

⁴Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Bayreuth

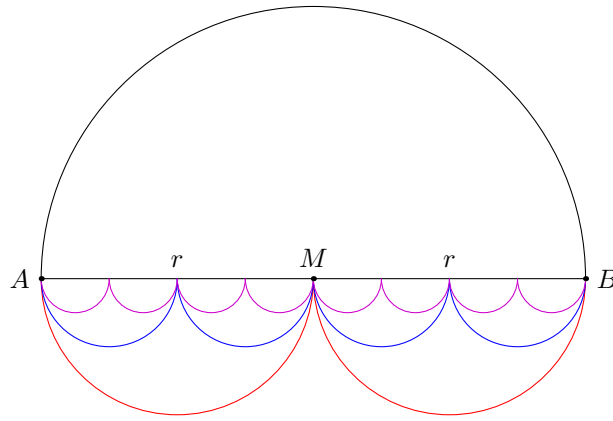


Abbildung 9: Halbkreisbögen erzeugen einen Grenzwert

$$u_n = 2n \cdot \frac{r}{2n} \cdot \pi = u_0.$$

Dann gilt aber auch: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0 = r \cdot \pi.$

In Anbetracht der Abb. 9 aber müssen die Halbkreisbögen mit zunehmendem n mehr und mehr in den Kreisdurchmesser $[AB]$ hineinwachsen. Die Summe der Bogenlängen ergäbe nun jedoch nach dem Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ die Länge $2r$. Weil aber $2 \cdot r < \pi \cdot r$ ist, besteht hier ein nicht aufzulösender Widerspruch.

Ein weiterer Sonderfall:

$h = 0$ (Vollkegel): $z_S = \frac{H}{4}$, wie schon gezeigt.

Randbedingung: $h = z_S$. Mit (11): $h = \frac{H+h}{4} \Leftrightarrow h = z_S = \frac{H}{3}.$

Man vergleiche das Ergebnis mit dem Sonderfall $h = H$ in (10)!

C. LÖSUNGEN KONKRETER PROBLEME AN DER HALBKUGEL

C.1 DER SCHWERPUNKT IN EINER HOHLKUGEL MIT KONSTANTER WANDSTÄRKE

Wir finden z.B. in ⁵ auf S. 175 in der Lösung der Aufgabe 7.11 für die Lage z_{HK} des Schwerpunktes über der Grundfläche einer massiven Halbkugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius R :

$$\boxed{z_{HK} = \frac{3}{8}R} \quad . \quad (12)$$

In der Abb. 10 wenden erneut den Drehmomentensatz an:

$$\begin{aligned} z_S \cdot \left(\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \right) &= \frac{3}{8}R \cdot \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{3}{8}r \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 \quad \left| : \frac{2}{3}\pi \right. \\ z_S \cdot (R^3 - r^3) &= \frac{3}{8} \cdot (R^4 - r^4) \quad \Leftrightarrow \quad z_S = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} \end{aligned}$$

Man vergleiche dieses Ergebnis mit dem von (8).

⁵Murray R. Spiegel, Ph.D. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York...1967

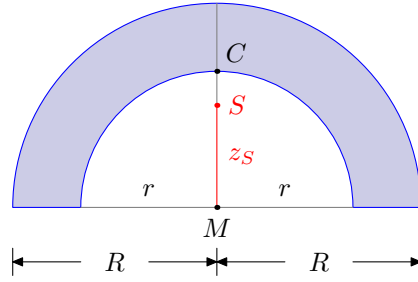


Abbildung 10: Der Axialschnitt einer Hohlkugel mit konstanter Wandstärke

Schließlich erhalten wir:

$$\boxed{z_S = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^3 + R^2r + Rr^2 + r^3}{R^2 + Rr + r^2}} \quad . \quad (13)$$

Sonderfälle:

$$r = 0: z_S = \frac{3}{8} \cdot R, \text{ siehe (12).}$$

$$r = R: z_S = \frac{3}{8} \cdot \frac{4R^3}{3R^2} = \frac{R}{2}. \quad (14)$$

D.h. der Schwerpunkt einer Doppel-Halbkugelschale ohne Dicke liegt auf halber Höhe über ihrem Durchmesser.

Wir betrachten noch die Randbedingung $S = C$. Dort lässt sich die Halbkugelschale so unterstützen, dass indifferentes Gleichgewicht herrscht. Dann muss gelten $z_S = r$.

$$\text{Also: } r = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^3 + R^2r + Rr^2 + r^3}{R^2 + Rr + r^2} \Leftrightarrow \dots \quad 5r^3 + 5Rr^2 + 5r^2R - 3R^3 = 0 \quad |: R^3.$$

Das ergibt $5 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 5 \cdot \frac{r}{R} - 3 = 0$. Wir setzen $\frac{r}{R} = x$ und erhalten:

$5x^3 + 5x^2 + 5x - 3 = 0$. Diese kubische Gleichung hat nur eine reelle Lösung, nämlich:

$$x = \frac{r}{R} = \left(\frac{2\sqrt{11}}{15} + \frac{58}{135} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{2\sqrt{11}}{15} - \frac{58}{135} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \approx 0,389365\dots$$

Dieser Näherungswert unterscheidet sich kaum von dem der massiven Halbkugel in (12).

Die Volumina der massiven und der herausgefrästen Halbkugel verhalten sich wie $\left(\frac{r}{R}\right)^3 \approx 0.059029\dots \approx 6\%$ (ein erstaunlich niedriger Wert!). Das bedeutet: Unterstützen wir die hohle Halbkugel in der Abb. 10 im Punkt C , dann lässt sie sich nach links oder rechts „etwas“ kippen, ohne dass sie abrutscht oder gar herabfällt. Vgl. Abb. 11:

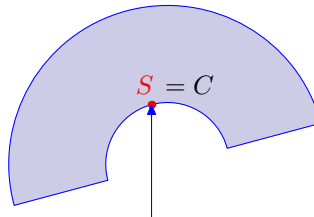


Abbildung 11: Der Axialschnitt einer Hohlkugel im indifferenten Gleichgewicht

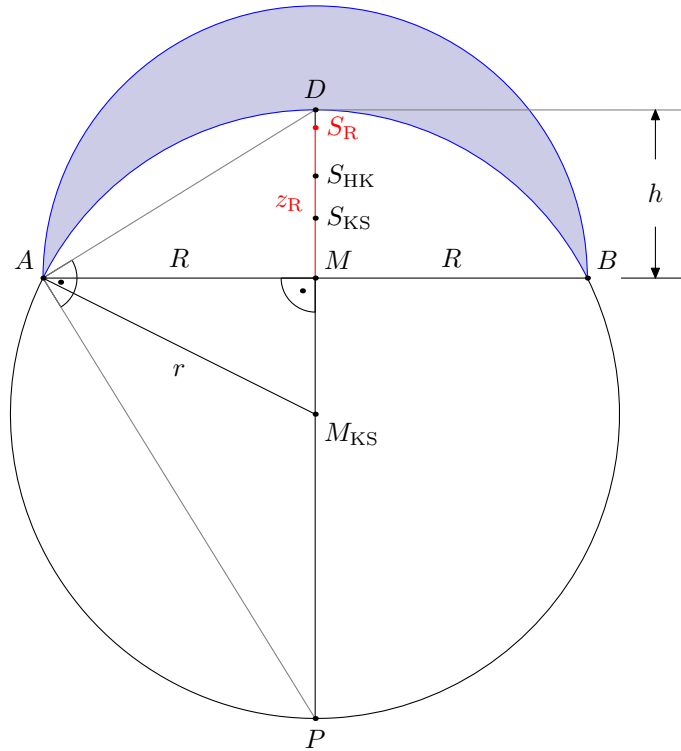


Abbildung 12: Der Axialschnitt einer Hohlkugel mit veränderlicher Wandstärke

Im Zusammenhang mit der Abb. 12 lässt sich das Volumen V_R dieses Rotationskörpers als Differenz aus dem Volumen V_{HK} der Halbkugel (Radius R , Mittelpunkt M) und dem Volumen V_{KS} eines Kugelsegmentes (Radius r , Mittelpunkt M_{KS} , Höhe h) errechnen:

In ⁶ finden wir auf S. 159: $V_{KS} = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3r - h)$.

Dort wird die Lage des Schwerpunktes S_{KS} dieses Segmentes über dem Mittelpunkt M_{KS} angegeben mit:

$$z_{KS}^* = \overline{M_{KS}S_R} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}. \quad (15)$$

Wenn wir nun aber, wie in der Abb. 12 dargestellt, $z_{KS} = \overline{MS_{KS}}$ definieren, so ergibt sich mit (15):

$$\begin{aligned} z_{KS} &= z_{KS}^* - (r - h) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4r^2 - 4rh + h^2}{3r - h} - \frac{(r - h)(3r - h)}{3r - h} \\ &= \frac{12r^2 - 12rh + 3h^2}{4(3r - h)} - \frac{4 \cdot (3r^2 - 4rh + h^2)}{4 \cdot (3r - h)} \\ &= \frac{12r^2 - 12rh + 3h^2 - 12r^2 + 16rh - 4h^2}{4(3r - h)} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir anstelle von (15) einen einfacheren Ausdruck:

$$\boxed{z_{KS} = \frac{h}{4} \cdot \frac{4r - h}{3r - h}} \quad . \quad (16)$$

⁶H.-J. Bartsch: Mathematische Formeln; VEB Fachbuchverlag Leipzig 1973

Mit Hilfe des Drehmomentensatzes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 z_R \cdot \left[\frac{2}{3} R^3 \pi - \frac{1}{3} \pi h^2 (3r + h) \right] &= \frac{3}{8} R \cdot \frac{2}{3} R^3 \pi - \frac{h}{4} \cdot \frac{4r - h}{3r - h} \cdot \frac{1}{3} \pi h^2 \cdot (3r - h) \quad \Bigg| \cdot \frac{3}{\pi} \\
 z_R \cdot [2R^3 - h^2(3r + h)] &= \frac{3}{4} R^4 - \frac{h^3}{4} (4r - h) \quad \Bigg| \cdot 4 \\
 \boxed{z_R = \frac{1}{4} \cdot \frac{3R^4 - 4rh^3 + h^4}{2R^3 - 3rh^2 + h^3}} & \quad .
 \end{aligned} \tag{17}$$

Nun ist aber ein Kugelsegment allein schon durch die Angabe von zwei der drei Größen R , r und h eindeutig festgelegt.

Über den Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck APD in der Abb. 12 erhalten wir $R^2 = 2rh - h^2$. (18)

Wollten wir jetzt in (17) die Variable h eliminieren, so müssten wir (18) als quadratische Gleichung auffassen, die es nach h aufzulösen gilt. Doch die zugehörige Diskriminante wird sperrig, da sich im Radikanden die beiden Variablen R und r tummeln.

Es bietet sich daher an, die Lage des Schwerpunktes S_R mit den Variablen R und h zu beschreiben; damit wird auch der Anschaulichkeit Rechnung getragen.

Aus (18) wird damit: $r = \frac{R^2 + h^2}{2h}$. Wir setzen dies in (17) ein und erhalten:

$$z_R = \frac{1}{4} \cdot \frac{3R^4 - 4 \cdot \frac{R^2 + h^2}{2h} \cdot h^3 + h^4}{2R^3 - 3 \cdot \frac{R^2 + h^2}{2h} \cdot h^2 + h^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3R^4 - 2R^2h^2 - 2h^4 + h^4}{2R^3 - \frac{3}{2} \cdot R^2h - \frac{3}{2} \cdot h^3 + h^3}$$

Damit erhalten wir:

$$\boxed{z_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R^4 - 2R^2h^2 - h^4}{4R^3 - 3R^2h - h^3}} \quad . \tag{19}$$

Der Sonderfall $h = R$ liefert in (19) nun zunächst: $z_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{0}$.

Aus (19) folgt aber $z_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4 \cdot \left[3 - 2 \cdot \left(\frac{h}{R} \right)^2 - \left(\frac{h}{R} \right)^4 \right]}{R^3 \cdot \left[4 - 3 \cdot \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R} \right)^3 \right]}$. Wir setzen nun $\frac{h}{R} = x$ und

erhalten:

$$z_R = \frac{R}{2} \cdot \frac{3 - 2x - x^4}{4 - 3x - x^3} = \frac{R}{2} \cdot \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{20}$$

Wir stellen fest:

- In (20) sind f und g jeweils stetig differenzierbar.
- Die Nennerfunktion g besitzt außer $x = 1$ keine reelle Nullstelle.
- Damit können wir die Regel von DE L'HOSPITAL (1661-1704) anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{R}{2} \cdot \frac{3 - 2x - x^4}{4 - 3x - x^3} \right) = \frac{R}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-2 - 4x^3}{-3 - 3x^2} \right) = \frac{R}{2}. \text{ Dieses Ergebnis wird von (14) bestätigt.}$$

Für den Sonderfall $h = 0$ erhalten wir $z_R = \frac{3}{8}R$, siehe (12).

Analog zum Fall C.1 untersuchen wir jetzt gemäß der Abb. 12 die Frage nach dem Verhältnis $\frac{h}{R}$, so dass sich die Halbkugelschale für $S_R = D$; d.h. $z_R = h$ im indifferenten Gleichgewicht befindet.

$$\text{Mit (19) erhalten wir: } z_R = h = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R^4 - 2R^2h^2 - h^4}{4R^3 - 3R^2h - h^3} \quad \Leftrightarrow \quad \dots$$

$$\Leftrightarrow \quad h^4 + 4R^2h^2 - 8R^3h + 3R^4 = (h - R)(h^3 + Rh^2 + 5R^2h - 3R^3) = 0.$$

Der Fall $R = h$ wurde schon behandelt. Also gilt dann für $R \neq h$:

$$h^3 + Rh^2 + 5R^2h - 3R^3 = 0 \quad |: R^3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{h}{R}\right)^3 + \left(\frac{h}{R}\right)^2 + 5\left(\frac{h}{R}\right) - 3 = 0.$$

Wir setzen $\frac{h}{R} = y$, dann ergibt sich: $y^3 + y^2 + 5y - 3 = 0$.

Diese Gleichung hat nur eine reelle Lösung, nämlich:

$$y = \frac{h}{R} = \left(\frac{2\sqrt{183}}{9} + \frac{62}{27}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{2\sqrt{183}}{9} - \frac{62}{27}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \approx 0.518\,392 \dots$$